**DẠNG 3: RÚT GỌN BIỂU THỨC VÀ GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH**

**A. Kiến thức cần nhớ**

1. Xét bài toán: Cho biểu thức 

a) Rút gọn 

b) Tìm giá trị của  sao cho  (m là hằng số) hoặc 

2. Giải bài toán

a) Rút gọn

- Đặt điều kiện để  có nghĩa

- Thực hiện rút gọn 

b) Tìm : Giải bất phương phương trình

- Kiểm tra điều kiện và kết luận

**B. Bài tập**

**Bài 1:**

Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tìm  sao cho 

**Lời giải**

a) Điều kiện  và 

Đặt 







b) 

. Vậy 

**Bài 2:**

Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tìm  để có  thỏa mãn 

**Lời giải**

a) Ta có 

Điều kiện: 



b) 

Theo đầu bài 

Nhận thấy 

Ngược lại với  thì 



Vậy  là các giá trị cần tìm

**Bài 3:** Học sinh giỏi huyện Triệu Phong, năm học 2019 - 2020

Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) So sánh  và 

**Lời giải**

a) Điều kiện 

Ta có 





b) Vì  và 

nên  với mọi  thỏa mãn điều kiện đã cho

Lại có: 

Dấu “=” không xảy ra vì 

Vậy 

**Bài 4:** Học sinh giỏi huyện Thường Tín, năm học 2019 - 2020

Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Chứng minh 

**Lời giải**

a) Điều kiện  có nghĩa 

Ta có 



b)  (bất đẳng thức Côsi)

Vì đẳng thức xảy ra  (không thỏa mãn điều kiện)

Vậy 

**Bài 5:** Học sinh giỏi huyện Ba Vì, năm học 2019 - 2020

Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tìm các giá trị của  để 

c) Tìm các giá trị của  để 

**Lời giải**

a) Điều kiện: 

Rút gọn được 

b)  (thỏa mãn)

 (không thỏa mãn điều kiện)

c)  và 

**Bài 6:** Học sinh giỏi huyện Ba Thước, năm học 2019 - 2020

Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tìm các giá trị của  để 

**Lời giải**

a) Ta có









b) Ta có 

Vậy không có giá trị nào của  thỏa mãn bài toán.

**Bài 7:** Chuyên Cao Bằng vòng 2, năm học 2019 - 2020

Cho biểu thức , với 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tìm tất cả các giá trị của  để 

**Lời giải**

a) Ta có 

- 

Vậy 

b) 

- TH1: 

- TH2:  (vô lý)

Vậy các giá trị  cần tìm là 

**Bài 8:** Chuyên Toán Ninh Bình, năm học 2019 - 2020

Với  xét hai biểu thức  và . Tìm tất cả các giá trị của  để .

**Lời giải**

Ta có 

Với , ta có  (vì )

.

**Bài 9:** HSG Tỉnh Yên Bái, năm học 2020 - 2021

Cho biểu thức  Với . Chứng minh rằng 

**Lời giải**

2) Với , ta có:











\* Chứng minh rằng  (Với )

Ta có:  

Với  ta có: 

Vậy: Với  thì 

**Bài 10:** HSG Huyện Hoài Đức, năm học 2019 - 2020

Cho biểu thức  , với .

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tính giá trị của  với 

c) Với giá trị nào của  thì 

**Lời giải**

a) Với  ta có



Vậy với  thì 

b) Ta có







Thay  (thỏa mãn ĐK) vào biểu thức  ta được 

Vậy với  thì 

c) Ta có







Với  và  

mà 

Dấu “=” xảy ra (tmđk). Vậy để  thì 

**Bài 11:** HSG Tân Kỳ, năm học 2018 - 2019

Cho biểu thức 

a) Tìm điều kiện xác định của 

b) Tính giá trị của  khi 

c) Cho . Tìm  để 

**Lời giải**

a) ĐKXĐ ; ; 









.

b) Ta thấy



(Thỏa mãn ĐKXĐ)

Thay  vào biểu thức , ta tính được .

c) ĐKXĐ ; ; 

Ta có: .

Khi đó,  ( vì ) 

Kết hợp với ĐKXĐ ta được ;; thì 

**BÀI 4: RÚT GỌN VÀ TÌM GIÁ TRỊ NGUYÊN CỦA BIỂU THỨC**

**Phương pháp:**

+ Đối với các biểu thức  với  là số nguyên,  nhận giá trị nguyên hoặc vô tỷ thì  nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi  là số nguyên và  là ước của số B.

+ Đối với các biểu thức  với  là số hữu tỷ,  nhận giá trị thực. Ta thường tìm cách đanh giá , tức là chặn  theo kiểu  từ đó suy ra các giá trị có thể của . Hoặc tìm ra điều kiện của  để tồn tại biến  thỏa mãn yêu cầu bài toán từ đó suy ra các giá trị nguyên có thể của 

- Đối với các bài toán tổng hợp học sinh cần chú ý điều kiện ban đầu để loại các giá trị không thỏa mãn

**Bài 1:** Học sinh giỏi huyện Đan Phượng, năm học 2019 - 2020

Cho biểu thức  và  với 

a) Tính giá trị của biểu thức  khi 

b) Rút gọn biểu thức 

c) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức  có giá trị nguyên

**Lời giải**

a) Điều kiện 

Khi  (thỏa mãn điều kiện) thì 

b) 

c) Ta có 

Để  nguyên thì  và 



**Bài 2:** Học sinh giỏi Tỉnh Thanh Hóa, năm học 2017 - 2018

Cho biểu thức  với 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tìm tất cả các giá trị của  sao cho giá trị của  là một số nguyên

**Lời giải**

a) Ta có 



Ta có điều kiện 

Do  nguyên nên  (loại)

Vậy không có giá trị nào của  để  nguyên.

**Bài 3:** *Học sinh giỏi Tỉnh Điện Biên, năm học 2018 - 2019*

Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tìm các giá trị của  để  nhận giá trị nguyên

**Lời giải**

a) Điều kiện 







b) Để  thì  là ước của 1 

Vậy  thì .

**Bài 4:** Chuyên Điện Biên, năm học 2018 - 2019

Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức . Tìm các số thực  để 

b) Tìm các số tự nhiên  là số chính phương sao cho  là số nguyên.

**Lời giải**

a) Ta có 



- Với 

- Với 

b) Ta có  là số chính phương nên  và 

Khi đó 

**Bài 5:** Chuyên Bắc Giang, năm học 2018 - 2019

Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của  để 

**Lời giải**

a) Ta có 



+) 



b) 

Vì  và  nguyên nên 

Vậy có  giá trị ngyên của  thỏa mãn bài toán.

**Bài 6:** Chuyên Toán Cần Thơ, năm học 2018 - 2019

Cho biểu thức  , trong đó 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tìm các giá trị nguyên của  để giá trị biểu thức  là số nguyên

**Lời giải**

a) Ta có 

- Nếu 

- Nếu 

b)

- Nếu  thì không có giá trị nguyên.

- Nếu  thì 

+  (loại)

+  (thỏa mãn)

**Bài 7:** Học sinh giỏi Tỉnh Thanh Hóa, năm học 2016 - 2017

Cho biểu thức  với 

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm các giá trị  nguyên thỏa mãn 

**Lời giải**

a) Ta có 





b) , với 



Ta có 

Thay vào P ta có các cặp giá trị  thỏa mãn.

**Bài 8:** Học sinh giỏi huyện Chương Mỹ, năm học 2019 - 2020

Cho biểu thức 

a) Tìm  để 

b) Biết  hãy tính giá trị của 

c) Tìm giá trị  nguyên để  nhận giá trị nguyên, khi 

d) Tìm  để 

**Lời giải**

a) Điều kiện 

Rút gọn được , do 

Kết hợp với điều kiện ta được: 

b) Tính được  (thỏa mãn điều kiện)

Thay vào biểu thức 

c) Ta có 

Để  nhận giá trị nguyên thì , kết hợp với điều kiện ta được



d) 

Ta có  với mọi  thuộc điều kiện xác định

 dấu “=” xảy ra 

**Bài 9:** HSG Tỉnh Lào Cai, năm học 2020 - 2021

Cho biểu thức  ()

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tìm  sao cho  nhận giá trị là một số nguyên

**Lời giải**

a) Ta có 







b) 



 nhận giá trị là một số nguyên 

(tmđk)

 (tmđk)

Vậy  thì  nhận giá trị là một số nguyên.

**Bài 10:** HSG Tỉnh Bắc Giang, năm học 2020 - 2021

Cho biểu thức  ()

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tìm các giá trị nguyên của  để  nhận giá trị nguyên.

**Lời giải**

1.

a) Với , ta có:

****

****.

Vậy với  thì .

b) Ta có .

Với , để  thì  là ước của .

Suy ra .

Lập bảng

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  | (loại) |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Kết hợp với điều kiện  thì  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Bài 11:** HSG Tỉnh Quảng Ninh, năm học 2020 - 2021

Cho biểu thức  ()

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tìm giá trị của  để  nhận giá trị nguyên.

**Lời giải**

a) Ta có:

 với  và .







Vậy 

b) Với  và 

Ta có 

Để nhận giá trị nguyên  và 

Ta có 

Mà ,  



Với    (thỏa mãn)

Với   (thỏa mãn)

Với   (thỏa mãn)

Vậy  thì nhận giá trị nguyên.

**Bài 12:** HSG Tỉnh Đồng Tháp, năm học 2020 - 2021

Cho biểu thức  ()

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tìm  để  có giá trị nguyên.

**Lời giải**

a) Với  ta có



 do  và 

b) Với  ta có



nguyên khi và chỉ khi  là ước của 8

Suy ra:

Kết hợp với điều kiện ta có:

**Bài 13:** HSG Tỉnh Sơn La, năm học 2020 - 2021

Cho hai biểu thức  và  với 

a) Tính giá trị của  tại 

b) Rút gọn 

c) TÌm tất cả các số nguyên  để  nhận giá trị nguyên.

**Lời giải**

a) Ta có:



Thay  vào biểu thức  ta được:



b) 



với 

c) 

là số nguyên là số nguyên



mà  với 



**Bài 14:** HSG Quận Tây Hồ, năm học 2020 - 2021

Cho hai biểu thức  với 

a) Rút gọn biểu thức 

c) Tìm tất cả các số thực  để biểu thức  đạt giá trị nguyên.

**Lời giải**

1) Rút gọn biểu thức .

Điều kiện xác định: 

Đặt , 





Thay  vào  ta được: 

b) Tìm các số thực  để biểu thức  đạt giá trị nguyên.



 nguyên nên .

Từ đó 

Do  nên . Suy ra 

Do  nguyên nên 

Với  thì 

Với  thì 

**Bài 15:** HSG Huyện Ba Vì, năm học 2020 - 2021

Cho hai biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Chứng minh rằng 

c) Với những giá trị nào của  thì biểu thức  nhận giá trị nguyên.

**Lời giải**

a) Rút gọn biểu thức .

Điều kiện ; .

Ta có 



Thay vào  ta được: .

b) Chứng minh rằng .

Ta có với  thì .

Suy ra .

Do đó, .

Suy ra .

c) Với những giá trị nào của thì biểu thức nhận giá trị nguyên?

Ta có 

Do đó  nhận giá trị nguyên bằng .

Khi đó .



Vậy với  thì  nhận giá trị nguyên.

**Bài 16:** HSG Huyện Mỹ Đức, năm học 2020 - 2021

Cho hai biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tính giá trị của biểu thức  khi 

c) Cho biểu thức . Tìm  để  có giá trị nguyên.

**Lời giải**

a) Ta có  Với 



b) Ta có: 



c) 

Với  ta có 



Mà dễ thấy 

Nên với 

+ Với 

+ Với 

Vậy 

**Bài 17:** HSG Huyện Hưng Hà, năm học 2019 - 2020

Cho hai biểu thức  (với )

a) Rút gọn biểu thức  và chứng minh rằng 

b) Với những giá trị nào của  thì biểu thức  nhận giá trị nguyên

**Lời giải**

a) Với  ta có:







Vậy với , ta có 

Ta có: 

Vì . Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:



Dấu “=” xảy ra khi: 

Vì  do đó 

b) Ta có:  xác định khi 

Chỉ ra P > 0 suy ra 

Vì 

Mà 

(thỏa mãn)

Vậy .